ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Αναζήτηση βάσης B του E έτσι ώστε ο πίνακας $M_B^B(f)$ να έχει όσο γίνεται απλούστερη μορφή. π.χ. διαγώνιος, άνω τριγωνικός κλπ.

$\Updownarrow$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Αναζήτηση αντιστρέψιμου πίνακα P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να έχει την απλούστερη μορφή.

Έστω E: $\mathbb{K}$-δ.χ. κ' $B=\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$ βάση του E
F: $\mathbb{K}$-δ.χ. κ' $C=\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \dots, \vec{\varepsilon}_n\}$ βάση του F.

Έστω $f: E \to F$ μια γραμμική απεικόνιση.

$$A = M_B^C(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας της f ως προς τις βάσεις B κ' C όπου $f(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{\varepsilon}_i$, $1 \le j \le m$.

Η αντιστοιχία $f \to M_B^C(f)$ ορίζει έναν ισομορφισμό $\mathbb{K}$-δ.χ.
$M: L(E,F) \to M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $M(f) = M_B^C(f)$

Αν B' βάση του E κ' C' βάση του F και έστω $B = M_{B'}^{C'}(f)$ ο πίνακας της f ως προς τις βάσεις B' και C'. Τότε οι πίνακες A, B είναι ισοδύναμοι αν $Q = M_B^{B'}$, $P = M_C^{C'}$ είναι πίνακες μετάβασης από τη βάση B στη B' και από τη βάση C στην C', τότε Q, P είναι αντιστρέψιμοι και $Q^{-1}AP = B$.

Ισοδύναμοι πίνακες έχουν ίδια βαθμίδα

ΓΕΝΙΚΑ Αν $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, τότε οι A, B: ισοδύναμοι $\Leftrightarrow$ $\exists$ Q, P αντιστρέψιμοι $m\times n$ έτσι ώστε $Q^{-1}AP = B$

Αν $f: E \to F$ είναι γραμμική, όπου $\dim_{\mathbb{K}} E = m$ κ' $\dim_{\mathbb{K}} F = n$ τότε:

$$\left.\begin{array}{l} \exists \text{ βάση } B \text{ του } E \\ \exists \text{ βάση } C \text{ του } F \end{array}\right\} M_B^C(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

όπου $r = \dim_{\mathbb{K}} Im(f)$ η βαθμίδα της f

Ορισμος

Δύο πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ καλούνται όμοιοι $\Leftrightarrow \exists\, P$ αντιστρέψιμος πίνακας, έτσι ώστε $P^{-1}AP = B$. Όμοιοι πίνακες έχουν ίδια βαθμίδα, ορίζουσα, ίχνος

Αν $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ είναι όμοιοι $\Rightarrow \exists\, P$ αντιστρέψιμος τ.ω. $P^{-1}AP = B \Rightarrow |P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = |P|^{-1}|A||P| = |A| = |B|$

Ευθυ Αθροισμα Υποχωρων

Έστω E: $\mathbb{K}$-δχ, όπου $\mathbb{K}$: σώμα ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Έστω $V_1, V_2, \dots, V_k$: υπόχωροι του E. Το άθροισμα των υποχώρων $V_1, \dots, V_k$ ορίζεται να είναι το σύνολο $\{V_1 + \dots + V_k = \{\vec{x_1} + \dots + \vec{x_k} \in E\} \mid x_i \in V_i,\ 1 \leq i \leq k\}$

Τότε $V_1 + V_2 + \dots + V_k$ είναι ένας υπόχωρος του E και είναι ο μικρότερος υπόχωρος του E ο οποίος περιέχει τους $V_1, \dots, V_k$

Ορισμος

Το άθροισμα $V_1 + \dots + V_k$ των υποχώρων $V_1 \dots V_k$ καλείται ευθύ ανν $\vec{x_1} + \dots + \vec{x_k} = \vec{\lambda_1} + \dots + \vec{\lambda_k}$ όπου $\vec{x_i}, \vec{\lambda_i} \in V_i$, τότε $\vec{\lambda_i} = \vec{x_i}$, $1 \leq i \leq k$.

Προταση

Αν $V_1, \dots, V_k$ υπόχωροι του E τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

1) Το άθροισμα των υποχώρων είναι ευθύ
2) $\vec{x_1} + \dots + \vec{x_k} = \vec{0}$, όπου $\vec{x_i} \in V_i$, $1 \leq i \leq k$, τότε $\vec{x_i} = \vec{0}$
3) $\forall i = 1, 2, \dots, k$: $V_i \cap (V_1 + \dots + V_{i-1} + V_i + V_{i+1} + \dots + V_k) = \{\vec{0}\}$